

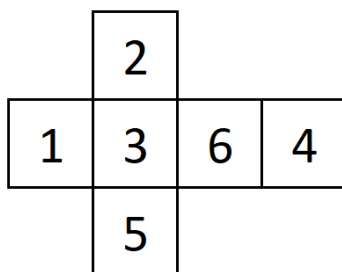
Всероссийская олимпиада школьников по математике

школьный этап 2024-2025

Максимальное количество баллов — 8

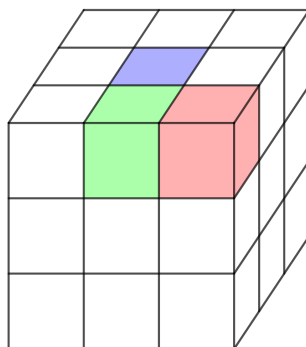
10 класс

1. Вариант 1. Имеется кубик, на каждой грани которого написано число. Развёртка этого кубика приведена на рисунке. Из 27 таких одинаковых кубиков построен куб большего размера. Чему равна минимально возможная сумма всех чисел, оказавшихся на шести гранях этого куба?



Ответ. 90

Решение. Рассмотрим произвольную вершину большого куба. К ней примыкают три единичных квадрата (на рисунке отмечены красным цветом), принадлежащие одному кубику. Поэтому сумма на них не меньше минимальной суммы различных чисел на гранях маленького кубика, т.е. не меньше, чем $1 + 2 + 3 = 6$.

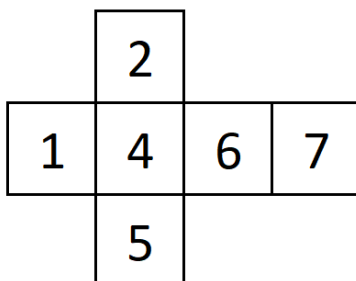


Теперь рассмотрим кубик, прилегающий к середине ребра большого куба. Две его грани (на рисунке отмечены зелёным цветом) лежат на гранях большого куба. Поэтому, сумма на них не меньше, чем $1 + 2 = 3$. Наконец, центральный единичный квадратик на

каждой грани (отмечен синим) содержит число не меньшее 1. Таким образом, сумма чисел на гранях куба не меньше, чем $8 \cdot 6 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 90$.

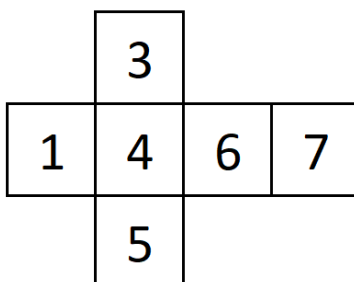
Для построения примера достаточно угловые кубики ориентировать так, чтобы на гранях большого куба были числа 1, 2, 3; кубики, прилежащие к центральным частям рёбер – числа 1 и 2, кубики, прилежащие к центрам граней – число 1.

Вариант 2. Имеется кубик, на каждой грани которого написано число. Развёртка этого кубика приведена на рисунке. Из 27 таких одинаковых кубиков построен куб большего размера. Чему равна минимально возможная сумма всех чисел, оказавшихся на шести гранях этого куба?



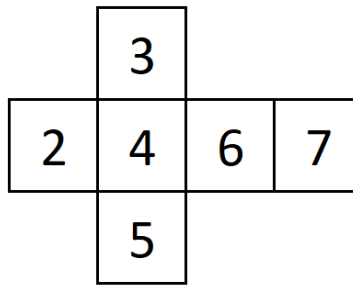
Ответ. 98

Вариант 3. Имеется кубик, на каждой грани которого написано число. Развёртка этого кубика приведена на рисунке. Из 27 таких одинаковых кубиков построен куб большего размера. Чему равна минимально возможная сумма всех чисел, оказавшихся на шести гранях этого куба?



Ответ. 118

Вариант 4. Имеется кубик, на каждой грани которого написано число. Развёртка этого кубика приведена на рисунке. Из 27 таких одинаковых кубиков построен куб большего размера. Чему равна минимально возможная сумма всех чисел, оказавшихся на шести гранях этого куба?



Ответ. 144

2. Вариант 1. Пешеходная тропа начинается от точки Р. Тропа состоит из ровного участка от точки Р до точки Q, за которым следует подъём в гору от Q до смотровой площадки в точке R. Путешественник шёл от точки Р к Q, затем к R и обратно от R к Q, затем к Р. Скорость путешественника при подъёме в гору на 50% меньше, чем при спуске и на 1 км/ч меньше, чем при движении на ровном участке. Скорость при спуске в 1,5 раза больше, чем при движении на ровном участке. Найдите общее расстояние, пройденное туристом, если на весь путь он потратил: 10 часов. Ответ выразите в километрах.

Ответ. 40

Решение. Обозначим за $3x$ скорость путешественника на подъёме. Тогда скорость на спуске равна $6x$, а скорость на ровном участке $3x + 1$. По условию задачи известно, что $6x = 1,5 \cdot (3x + 1)$. Откуда, $x = 1$. Следовательно, скорости на подъёме, спуске и на ровном участке равны 3, 6 и 4 км/ч соответственно.

Пусть расстояния на ровном участке и подъёме равны a и b соответственно. Тогда найдём время путешествия, $\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{b}{6} = 10$. Отсюда $2a + 2b = 40$. Но $2a + 2b$ и есть расстояние, пройденное туристом.

Вариант 2. Пешеходная тропа начинается от точки Р. Тропа состоит из ровного участка от точки Р до точки Q, за которым следует подъём в гору от Q до смотровой площадки в точке R. Путешественник шёл от точки Р к Q, затем к R и обратно от R к Q, затем к Р. Скорость путешественника при подъёме в гору на 50% меньше, чем при спуске и на 1 км/ч меньше, чем при движении на ровном участке. Скорость при спуске в 1,5 раза больше, чем при движении на ровном участке. Найдите общее расстояние, пройденное туристом, если на весь путь он потратил 7 часов. Ответ выразите в километрах.

Ответ. 28

Вариант 3. Пешеходная тропа начинается от точки Р. Тропа состоит из ровного участка от точки Р до точки Q, за которым следует подъём в гору от Q до смотровой площадки в точке R. Путешественник шёл от точки Р к Q, затем к R и обратно от R к Q, затем к Р. Скорость путешественника при подъёме в гору на 50% меньше, чем при спуске и на 1 км/ч меньше, чем при движении на ровном участке. Скорость при спуске в 1,5 раза больше, чем при движении на ровном участке. Найдите общее расстояние, пройденное туристом, если на весь путь он потратил 8 часов. Ответ выразите в километрах.

Ответ. 32

Вариант 4. Пешеходная тропа начинается от точки Р. Тропа состоит из ровного участка от точки Р до точки Q, за которым следует подъём в гору от Q до смотровой площадки в точке R. Путешественник шёл от точки Р к Q, затем к R и обратно от R к Q, затем к Р. Скорость путешественника при подъёме в гору на 50% меньше, чем при спуске и на 1 км/ч меньше, чем при движении на ровном участке. Скорость при спуске в 1,5 раза больше, чем при движении на ровном участке. Найдите общее расстояние, пройденное туристом, если на весь путь он потратил 9 часов. Ответ выразите в километрах.

Ответ. 36

3. Вариант 1. У Билли Бонса есть x монет в пять песо, y – в десять песо и z – в двадцать пять песо. У сквайра Трелони есть y монет в пять песо, z – в десять песо и x – в двадцать пять песо. У Джона Сильвера есть z монет в пять песо, x – в десять песо и y – в двадцать пять песо. У них в сумме 6480 песо. Билли Бонс купил лодку, отдав половину своих монет в десять песо и $4/5$ своих монет в двадцать пять песо. Сколько песо осталось у Билли Бонса?

Ответ. 810

Решение. У Билли Бонса, сквайра Трелони и Джона Сильвера количество денег (в песо) равно $5x + 10y + 25z$, $5y + 10z + 25x$, $5z + 10x + 25y$ соответственно. Складывая и деля на 40 получаем $x + y + z = 162$. После покупки лодки у Билли Бонса осталось $5x + 10y + 25z - 5y - 20z = 5x + 5y + 5z = 810$ песо.

Вариант 2. У Билли Бонса есть x монет в пять песо, y – в десять песо и z – в двадцать пять песо. У сквайра Трелони есть y монет в пять песо, z – в десять песо и x – в двадцать пять песо. У Джона Сильвера есть z монет в пять песо, x – в десять песо и y – в двадцать пять песо. У них в сумме 6560 песо. Билли Бонс купил лодку, отдав половину своих монет в десять песо и $4/5$ своих монет в двадцать пять песо. Сколько песо осталось у Билли Бонса?

Ответ. 820

Вариант 3. У Билли Бонса есть x монет в пять песо, y – в десять песо и z – в двадцать пять песо. У сквайра Трелони есть y монет в пять песо, z – в десять песо и x – в двадцать пять песо. У Джона Сильвера есть z монет в пять песо, x – в десять песо и y – в двадцать пять песо. У них в сумме 6640 песо. Билли Бонс купил лодку, отдав половину своих монет в десять песо и $4/5$ своих монет в двадцать пять песо. Сколько песо осталось у Билли Бонса?

Ответ. 830

Вариант 4. У Билли Бонса есть x монет в пять песо, y – в десять песо и z – в двадцать пять песо. У сквайра Трелони есть y монет в пять песо, z – в десять песо и x – в двадцать пять песо. У Джона Сильвера есть z монет в пять песо, x – в десять песо и y – в двадцать пять песо. У них в сумме 6720 песо. Билли Бонс купил лодку, отдав половину своих монет в десять песо и $4/5$ своих монет в двадцать пять песо. Сколько песо осталось у Билли Бонса?

Ответ. 840

4. Вариант 1. Найдите все натуральные n такие, что найдётся простое число p для которого выполняется равенство $6n^2 + p + 3 = n(2p + 9)$.

Ответ. 2

Решение. Выразим p через n . Получим, $p(2n - 1) = 6n^2 - 9n + 3 = 3(n - 1)(2n - 1)$. Заметим, что $2n - 1 \neq 0$, т.к. n – целое, поэтому, $p = \frac{3(n-1)(2n-1)}{2n-1} = 3(n - 1)$. Поскольку p простое число, то $n - 1 = 1$, отсюда, $n = 2$. Это n подходит, достаточно взять $p = 3$.

Вариант 2. Найдите все натуральные n такие, что найдётся простое число p для которого выполняется равенство $6n^2 + p + 6 = n(2p + 15)$.

Ответ. 3

Вариант 3. Найдите все натуральные n такие, что найдётся простое число p для которого выполняется равенство $6n^2 + p + 9 = n(2p + 21)$.

Ответ. 4

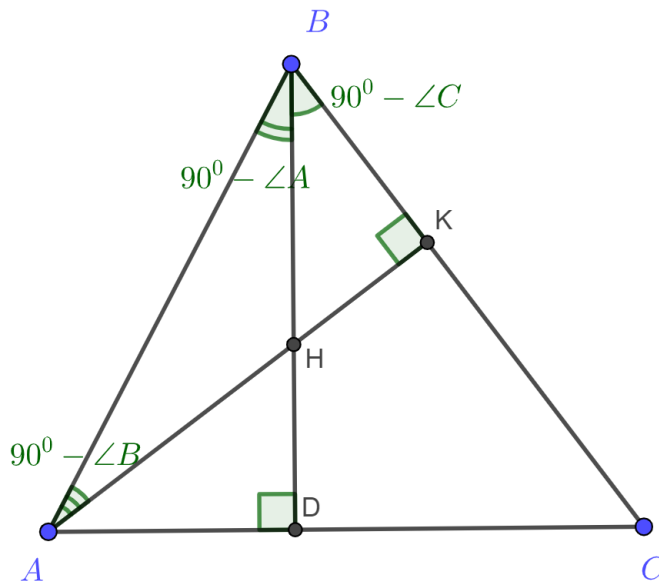
Вариант 4. Найдите все натуральные n такие, что найдётся простое число p для которого выполняется равенство $6n^2 + p + 12 = n(2p + 27)$.

Ответ. 5

5. Вариант 1. В треугольнике ABC проведена высота AK . H – точка пересечения высот треугольника. Даны косинусы двух его углов $\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$, $\cos \angle ABC = \frac{5}{13}$. Для вашего удобства мы посчитали косинус третьего угла $\cos \angle BCA = \frac{16}{65}$. Найдите $\frac{AH}{HK}$.

Ответ. 169/20

Решение.



Обозначим углы $\angle CAB = \angle A$, $\angle ABC = \angle B$, $\angle BCA = \angle C$. Из треугольника AHB получаем, что $\frac{AH}{BH} = \frac{\sin \angle ABH}{\sin \angle BAH} = \frac{\sin(90^\circ - \angle A)}{\sin(90^\circ - \angle B)} = \frac{\cos \angle A}{\cos \angle B}$. Кроме того, $\frac{BK}{BH} = \sin \angle KBH = \sin(90^\circ - \angle C) = \cos \angle C$. Тогда, $\frac{AH}{BK} = \frac{\cos \angle A}{\cos \angle B \cdot \cos \angle C} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 65}{5 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{169}{20}$.

Вариант 2. В треугольнике ABC проведена высота AK . H – точка пересечения высот треугольника. Даны косинусы двух его углов $\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$, $\cos \angle ABC = \frac{8}{17}$. Для вашего

удобства мы посчитали косинус третьего угла $\cos \angle BCA = \frac{13}{85}$. Найдите $\frac{AH}{HK}$.

Ответ. 289/26

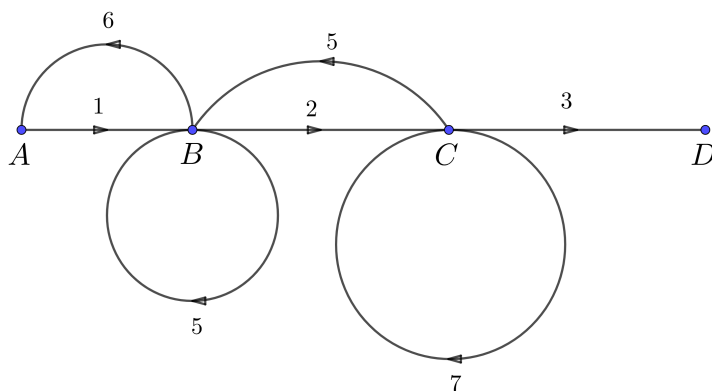
Вариант 3. В треугольнике ABC проведена высота AK . H – точка пересечения высот треугольника. Даны косинусы двух его углов $\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$, $\cos \angle ABC = \frac{7}{25}$. Для вашего удобства мы посчитали косинус третьего угла $\cos \angle BCA = \frac{44}{125}$. Найдите $\frac{AH}{HK}$.

Ответ. 625/77

Вариант 4. В треугольнике ABC проведена высота AK . H – точка пересечения высот треугольника. Даны косинусы двух его углов $\cos \angle CAB = \frac{3}{5}$, $\cos \angle ABC = \frac{20}{29}$. Для вашего удобства мы посчитали косинус третьего угла $\cos \angle BCA = \frac{24}{145}$. Найдите $\frac{AH}{HK}$.

Ответ. 841/160

6. Вариант 1. Парк имеет четыре площадки A, B, C, D и дорожки, по которым можно двигаться в указанных на плане направлениях. На плане рядом со стрелками указано время в минутах, которое требуется, чтобы пройти по соответствующей дорожке. Дима прошёл из A в D за t минут ($t \leq 100$). Сколько существует различных возможных значений t ?



Ответ. 83

Решение. Заметим, что Дима прошёл отрезки AB , BC и CD , а также возможно несколько кольцевых маршрутов длиной 5 и несколько кольцевых маршрутов длиной $7 = 1 + 6 = 2 + 5$. Поэтому, длина его маршрута выглядит так $1 + 2 + 3 + 5n + 7m$, где $n \geq 0$ и $m \geq 0$. Таким образом, нужно найти сколько уравнений вида $5n + 7m = t$, где $0 \leq t \leq 94$, t – целое, имеют решения в целых неотрицательных числах.

При $t \geq 24$ такое уравнение имеет целые неотрицательные решения, действительно,

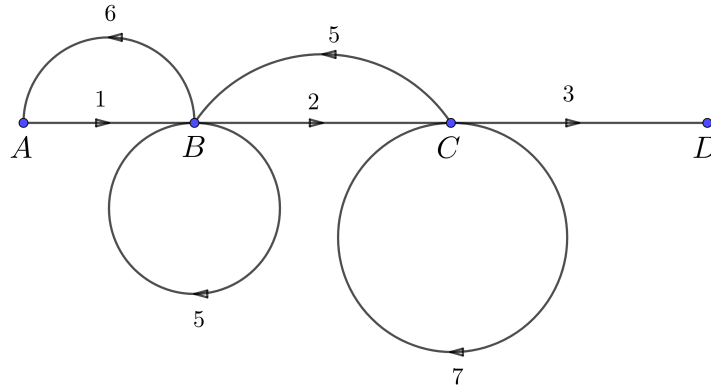
- 1) если $t = 24 + 5k$, $k \geq 0$, то $n = 2 + k$, $m = 2$,
- 2) если $t = 25 + 5k$, $k \geq 0$, то $n = 5 + k$, $m = 0$,
- 3) если $t = 26 + 5k$, $k \geq 0$, то $n = 1 + k$, $m = 3$,
- 4) если $t = 27 + 5k$, $k \geq 0$, то $n = 4 + k$, $m = 1$,
- 5) если $t = 28 + 5k$, $k \geq 0$, то $n = k$, $m = 4$.

При $t \leq 23$ целые неотрицательные решения есть лишь при t равном 0, 5, 7, 10, 12, 14,

15, 17, 19, 20, 21, 22.

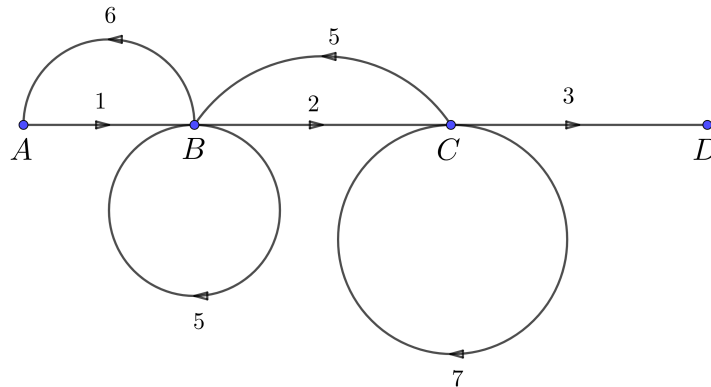
Значит, различных значений t ровно $12 + (94 - 23) = 83$.

Вариант 2. Парк имеет четыре площадки A, B, C, D и дорожки, по которым можно двигаться в указанных на плане направлениях. На плане рядом со стрелками указано время в минутах, которое требуется, чтобы пройти по соответствующей дорожке. Дима прошёл из A в D за t минут ($t \leq 135$). Сколько существует различных возможных значений t ?



Ответ. 118

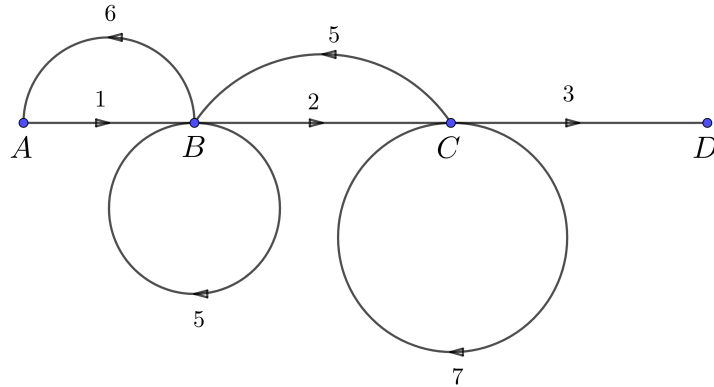
Вариант 3. Парк имеет четыре площадки A, B, C, D и дорожки, по которым можно двигаться в указанных на плане направлениях. На плане рядом со стрелками указано время в минутах, которое требуется, чтобы пройти по соответствующей дорожке. Дима прошёл из A в D за t минут ($t \leq 170$). Сколько существует различных возможных значений t ?



Ответ. 153

Вариант 4. Парк имеет четыре площадки A, B, C, D и дорожки, по которым можно двигаться в указанных на плане направлениях. На плане рядом со стрелками указано время в минутах, которое требуется, чтобы пройти по соответствующей дорожке. Дима прошёл из

A в D за t минут ($t \leq 205$). Сколько существует различных возможных значений t ?

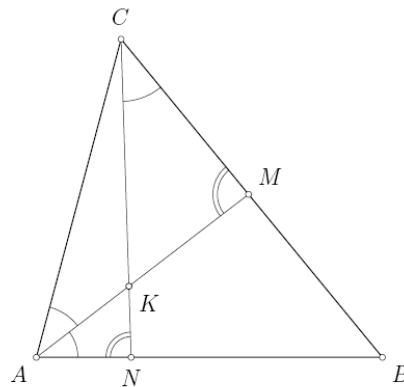


Ответ. 188

7. Вариант 1. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle BAM = \angle MAC = \angle NCB$. Известно, что $AC = 6$, $AN = 2$. Найдите значение выражения $AM^2 - MC^2$.

Ответ. 12

Решение. Заметим, что $\angle ANC = 180^\circ - \angle CAN - \angle ACN = 180^\circ - \angle CAM - \angle KCM - \angle ACN = \angle AMC$. Тогда, треугольники MAC и NAK подобны по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $AM/AN = AC/AK$, поэтому $AM \cdot AK = AC \cdot AN$. Аналогично, из подобия треугольников MAC и MCK следует, что $AM/MC = MC/KM$. Тогда, $AM \cdot KM = MC^2$. Учитывая, что $AK + KM = AM$ выводим $MC^2 = AM \cdot KM = AM \cdot (AM - AK) = AM^2 - AM \cdot AK = AM^2 - AC \cdot AN$. Отсюда следует, что $AM^2 - MC^2 = AC \cdot AN = 6 \cdot 2 = 12$.



Вариант 2. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle BAM = \angle MAC = \angle NCB$. Известно, что $AC = 12$, $AN = 4$. Найдите значение выражения $AM^2 - MC^2$.

Ответ. 48

Вариант 2. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки

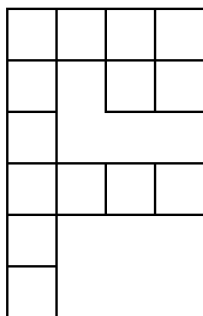
M и N соответственно так, что $\angle BAM = \angle MAC = \angle NCB$. Известно, что $AC = 18$, $AN = 6$. Найдите значение выражения $AM^2 - MC^2$.

Ответ. 108

Вариант 4. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle BAM = \angle MAC = \angle NCB$. Известно, что $AC = 24$, $AN = 8$. Найдите значение выражения $AM^2 - MC^2$.

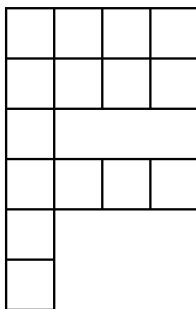
Ответ. 192

8. Вариант 1. Какое наибольшее количество фигур, указанных на рисунке, можно разместить без наложений на доске 300×300 ? Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 6000

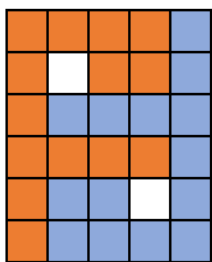
Решение. Заметим, что везде, где можно поставить указанную фигуру можно поставить и фигуру следующего вида:



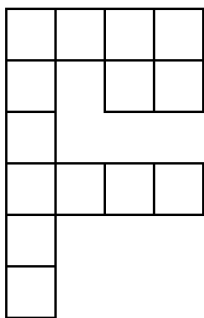
Действительно, фигуры отличаются только одной клеткой и эту клетку невозможно заполнить другими фигурами.

Тогда каждая фигура занимает 15 клеток. Поэтому на доску невозможно поместить более чем $\frac{300 \cdot 300}{15} = 6000$ фигур.

Для построения примера делим доску на прямоугольники 5×6 и каждый из них заполняем так, как показано на рисунке.

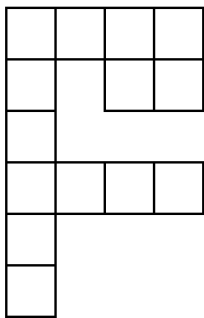


Вариант 2. Какое наибольшее количество фигур, указанных на рисунке, можно разместить без наложений на доске 600×600 ? Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



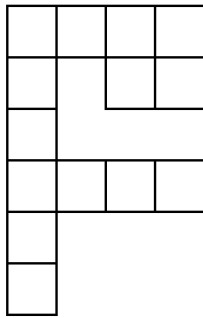
Ответ. 24000

Вариант 3. Какое наибольшее количество фигур, указанных на рисунке, можно разместить без наложений на доске 900×900 ? Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 54000

Вариант 4. Какое наибольшее количество фигур, указанных на рисунке, можно разместить без наложений на доске 1200×1200 ? Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 96000