

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
школьный этап 2024-2025  
Максимальное число баллов — 8

**11 класс**

**1. Вариант 1.** Воспитательница раздала детям кубики двух цветов и попросила каждого из них сложить башенку из пяти кубиков, поставив их друг на друга. Полностью одноцветных башенок быть не должно. Чему равно наибольшее возможное число детей, если башенки у всех получились разные?

**Решение.** Для каждого кубика существует две возможности, сообразно количеству цветов. Независимо друг от друга выставляются 5 кубиков, что дает  $2^5 = 32$  возможности, но при этом две башенки будут одноцветными, поэтому надо вычесть их из найденного количества. Итого 30 различных башенок, что соответствует наибольшему числу детей.

**Ответ.** 30

**Вариант 2.** Детям раздали кубики двух цветов и попросили каждого из них сложить башенку из шести кубиков, поставив их друг на друга. Полностью одноцветных башенок быть не должно. Чему равно наибольшее возможное число детей, если башенки у всех получились разные?

**Ответ.** 62

**Вариант 3.** Воспитательница раздала детям кубики трех цветов и попросила каждого из них сложить башенку из трех кубиков, поставив их друг на друга. Полностью одноцветных башенок быть не должно. Чему равно наибольшее возможное число детей, если башенки у всех получились разные?

**Ответ.** 24

**Вариант 4.** Детям раздали кубики трех цветов и попросили каждого из них сложить башенку из четырех кубиков, поставив их друг на друга. Полностью одноцветных башенок быть не должно. Чему равно наибольшее возможное число детей, если башенки у всех получились разные?

**Ответ.** 78

**Вариант 5.** Воспитательница раздала детям зеленые и синие кубики и попросила каждого из них сложить башенку из шести кубиков, поставив их друг на друга. Полностью зеленых башенок быть не должно. Чему равно наибольшее возможное число детей, если башенки у всех получились разные?

**Ответ.** 63

**2. Вариант 1.** В детском лагере каждый день проводят по одному конкурсу. Каждый отличившийся в конкурсе получает вечером ровно один приз. В четверг каждый приз стоил 40 рублей, а в пятницу – 58 рублей. При этом в пятницу суммарные затраты на призы оказались выше, чем в четверг, как минимум на 1000 рублей, а число награжденных в эти дни отличалось не более чем на 2. Какое наименьшее число награжденных могло быть в четверг?

**Решение.** Обозначим число награжденных в четверг как  $x$ , в пятницу их было  $x + k$ , где  $k$  принимает целые значения от -2 до 2. Из условия задачи составляем неравенство  $58(x + k) - 40x \geq 1000$ . Получаем  $18x \geq 1000 - 58k$ . Очевидно, для получения наименьшего  $x$  следует взять наибольшее возможное  $k$ , то есть  $k = 2$ . Тогда  $x \geq 884/18$ , и наименьшее его целое значение - 50.

**Ответ.** 50

**Вариант 2.** В детском лагере каждый день проводят по одному конкурсу. Каждый отличившийся в конкурсе получает вечером ровно один приз. В четверг каждый приз стоил 28 рублей, а в пятницу – 53 рубля. При этом в пятницу суммарные затраты на призы оказались выше, чем в четверг, как минимум на 1000 рублей, а число награжденных в эти дни отличалось не более чем на 2. Какое наименьшее число награжденных могло быть в четверг?

**Ответ.** 36

**Вариант 3.** В детском лагере каждый день проводят по одному конкурсу. Каждый отличившийся в конкурсе получает вечером ровно один приз. В четверг каждый приз стоил 39 рублей, а в пятницу – 60 рублей. При этом в пятницу суммарные затраты на призы оказались выше, чем в четверг, как минимум на 1000 рублей, а число награжденных в эти дни отличалось не более чем на 2. Какое наименьшее число награжденных могло быть в четверг?

**Ответ.** 42

**Вариант 4.** В детском лагере каждый день проводят по одному конкурсу. Каждый отличившийся в конкурсе получает вечером ровно один приз. В четверг каждый приз стоил 34 рубля, а в пятницу – 55 рублей. При этом в пятницу суммарные затраты на призы оказались выше, чем в четверг, как минимум на 1000 рублей, а число награжденных в эти дни отличалось не более чем на 2. Какое наименьшее число награжденных могло быть в четверг?

**Ответ.** 43

**Вариант 5.** В детском лагере каждый день проводят по одному конкурсу. Каждый отличившийся в конкурсе получает вечером ровно один приз. В четверг каждый приз стоил 30 рублей, а в пятницу – 49 рублей. При этом в пятницу суммарные затраты на призы оказались выше, чем в четверг, как минимум на 1000 рублей, а число награжденных в эти дни отличалось не более чем на 2. Какое наименьшее число награжденных могло быть в четверг?

**Ответ.** 48

**3. Вариант 1.** Найдите  $\sqrt{15 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}$ , если  $\sqrt{15 - x^2} - \sqrt{12 - x^2} = 1, 5$ .

**Решение.** Нетрудно заметить, что  $(\sqrt{15 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}) \cdot (\sqrt{15 - x^2} - \sqrt{12 - x^2}) =$

$15 - x^2 - (12 - x^2) = 3$ . Тогда значение искомого выражения равно 2. Замечание. Необходимо еще убедиться, что противоречий с возможными значениями не возникает: получилось, что сумма квадратных корней больше их же положительной разности - значит, такая ситуация действительно возможна.

**Ответ. 2**

Вариант 2. Найдите  $\sqrt{17 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}$ , если  $\sqrt{17 - x^2} - \sqrt{12 - x^2} = 1$ .

**Ответ. 5**

Вариант 3. Найдите  $\sqrt{11 - x^2} + \sqrt{5 - x^2}$ , если  $\sqrt{11 - x^2} - \sqrt{5 - x^2} = 2$ .

**Ответ. 3**

Вариант 4. Найдите  $\sqrt{19 - x^2} + \sqrt{11 - x^2}$ , если  $\sqrt{19 - x^2} - \sqrt{11 - x^2} = 2$ .

**Ответ. 4**

Вариант 5. Найдите  $\sqrt{19 - x^2} - \sqrt{10 - x^2}$ , если  $\sqrt{19 - x^2} + \sqrt{10 - x^2} = 4, 5$ .

**Ответ. 2**

4. Вариант 1. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведены касательные к каждой из окружностей, вторично пересекающие их в точках  $C$  и  $K$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $CA = 8$ ,  $KA = 18$  и касательные перпендикулярны друг другу.

**Решение.** Как известно, радиус, ведущий в точку касания, перпендикулярен касательной. А поскольку данные касательные перпендикулярны, у каждой из окружностей центр лежит на касательной к другой окружности, то есть сами отрезки  $BC$  и  $BK$  являются диаметрами. Но тогда опирающиеся на них углы  $BAC$  и  $BAK$  - прямые, и тогда точки  $C$ ,  $A$  и  $K$  лежат на одной прямой, и отрезок  $BA$  служит высотой прямоугольного треугольника  $CBK$ . По известному факту,  $BA = \sqrt{CA \cdot KA} = \sqrt{8 \cdot 18} = 12$ .

**Ответ. 12**

Вариант 2. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведены касательные к каждой из окружностей, вторично пересекающие их в точках  $C$  и  $K$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $CA = 6$ ,  $KA = 54$  и касательные перпендикулярны друг другу.

**Ответ. 18**

Вариант 3. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведены касательные к каждой из окружностей, вторично пересекающие их в точках  $C$  и  $K$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $CA = 90$ ,  $KA = 10$  и касательные перпендикулярны друг другу.

**Ответ. 30**

Вариант 4. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведены касательные к каждой из окружностей, вторично пересекающие их в точках  $C$  и  $K$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $CA = 8$ ,  $KA = 50$  и касательные перпендикулярны друг другу.

**Ответ. 20**

Вариант 5. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведены касательные к каждой из окружностей, вторично пересекающие их в точках  $C$  и  $K$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $CA = 18$ ,  $KA = 32$  и касательные перпендикулярны друг другу.

**Ответ. 24**

5. Вариант 1. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  катеты равны  $\cos \alpha$  и  $4 \sin \alpha$ . Найдите квадрат меньшего катета. Ответ дайте в виде несократимой обыкновенной дроби.

**Решение.** Обозначим катеты как  $a = \cos \alpha$  и  $b = 4 \sin \alpha$ . Если угол  $\alpha$  лежит против катета  $b$ , получаем, что  $\operatorname{tg} \alpha = b/a = 4 \sin \alpha / \cos \alpha = 4 \operatorname{tg} \alpha$ , что невозможно. Тогда угол  $\alpha$  лежит против катета  $a$ , и имеем  $\operatorname{tg} \alpha = a/b = \cos \alpha / 4 \sin \alpha = 1/4 \operatorname{tg} \alpha$ . Отсюда получаем, что  $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1/4$ . Значит,  $\alpha$  - меньший из острых углов треугольника, и против него лежит меньший катет  $a$ . Получаем:  $a^2 = \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+1/4} = 4/5$ .

**Ответ. 4/5**

Вариант 2. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  катеты равны  $\cos \alpha$  и  $2 \sin \alpha$ . Найдите квадрат меньшего катета. Ответ дайте в виде несократимой обыкновенной дроби.

**Ответ. 2/3**

Вариант 3. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  катеты равны  $5 \cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . Найдите квадрат меньшего катета. Ответ дайте в виде несократимой обыкновенной дроби.

**Ответ. 5/6**

Вариант 4. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  катеты равны  $4 \cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . Найдите квадрат меньшего катета. Ответ дайте в виде несократимой обыкновенной дроби.

**Ответ. 4/5**

Вариант 5. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  катеты равны  $2 \cos \alpha$  и  $3 \sin \alpha$ . Найдите квадрат меньшего катета. Ответ дайте в виде несократимой обыкновенной дроби.

**Ответ. 12/5**

6. Вариант 1. Для скольких пар  $(p; q)$ , образованных целыми числами, выполняется неравенство  $p^2 + q^2 < 4(p + q)$ ? Пары, отличающиеся порядком элементов, считаются различными.

**Решение.** Преобразуем неравенство, выделив полные квадраты. Получаем  $(p - 2)^2 + (q - 2)^2 < 8$ . Пар целых чисел - решений неравенства будет столько же, сколько и для неравенства  $p^2 + q^2 < 8$ . Для  $p > 0, q > 0$  имеем возможные пары квадратов  $(1; 1), (1; 4), (4; 1)$ , с учетом возможной перемены знака у обеих переменных, это дает 12 решений. Для  $p = 0, q \neq 0$  возможны значения  $q^2 - 1$  и 4, это дает 4 решения с учетом смены знака  $q$ . Поменяв переменные ролями, получим еще 4 решения. И, наконец, имеется пара  $(0; 0)$ . Итого получается  $12+4+4+1=21$  решение.

**Ответ. 21**

Вариант 2. Для скольких пар  $(p; q)$ , образованных целыми числами, выполняется неравенство  $p^2 + q^2 < 2(3p + 2q)$ ? Пары, отличающиеся порядком элементов, считаются различными.

**Ответ. 37**

Вариант 3. Для скольких пар  $(p; q)$ , образованных целыми числами, выполняется неравенство  $p^2 + q^2 < 2(p + 3q)$ ? Пары, отличающиеся порядком элементов, считаются различными.

**Ответ. 29**

Вариант 4. Для скольких пар  $(p; q)$ , образованных целыми числами, выполняется неравенство  $p^2 + q^2 < 2(2p + q)$ ? Пары, отличающиеся порядком элементов, считаются различными.

**Ответ. 13**

Вариант 5. Для скольких пар  $(p; q)$ , образованных целыми числами, выполняется неравенство  $p^2 + q^2 < 2(3p - q)$ ? Пары, отличающиеся порядком элементов, считаются различными.

**Ответ. 29**

7. Вариант 1. Сколько вершин может быть у выпуклого многогранника, имеющего в точности 12 ребер? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

**Решение.** Каждое ребро многогранника соединяет две его вершины, поэтому число вхождений ребер в вершины составляет 24. При этом в каждой вершине сходятся не менее трех ребер, и значит число вершин не более 8. Минимально возможное число вершин многогранника составляет 4, и такой многогранник один - тетраэдр, но он условию задачи не удовлетворяет. Если вершин 5, то из каждой исходит не более четырех ребер, и общее число вхождений ребер в вершины не более 20 - тоже противоречит ранее сказанному, что их 24. Значит, вершин не менее 6. Примеры с 6, 7 и 8 вершинами существуют: это соответственно октаэдр, шестиугольная пирамида и четырехугольная призма.

**Ответ. 6; 7; 8**

Вариант 2. Сколько вершин может быть у выпуклого многогранника, имеющего в точности 9 ребер? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

**Ответ. 5; 6**

Вариант 3. Сколько вершин может быть у выпуклого многогранника, имеющего в точности 11 ребер? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

**Ответ. 6; 7**

Вариант 4. Сколько вершин может быть у выпуклого многогранника, имеющего в точности 14 ребер? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

**Ответ. 7; 8; 9**

Вариант 5. Сколько вершин может быть у выпуклого многогранника, имеющего в точности 13 ребер? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

**Ответ. 7; 8**

8. Вариант 1. Председатель спортивной федерации поручил всю работу своим четырем заместителям и выдал им наборы печатей. Документ считается действительным, если на нем стоят печати всех возможных видов. Необходимо сделать так, чтобы любые три заместителя могли выдать действительный документ, а никакие два не могли. Какое минимальное число видов печатей должно быть? Сколько экземпляров всех печатей надо раздать заместителям?

**Решение.** Поскольку никакие два заместителя не должны иметь полного набора печатей, два оставшихся должны иметь хотя бы одну недостающую печать, поэтому число различных печатей не меньше, чем число различных групп по 2 заместителя, их  $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ . При этом печать каждого вида должна быть как минимум в двух экземплярах, потому что иначе нашлась бы тройка заместителей, ни у кого из которых такой печати нет, а она есть только у не входящего в эту тройку. Поэтому общее количество печатей не менее  $6 \cdot 2 = 12$ . Соответствующий пример легко строится: каждый заместитель получает печати трех видов, в паре с каждым из остальных трех заместителей, всего видов печатей 6, а общее число их экземпляров - 12.

**Ответ. 6; 12**

Вариант 2. Председатель спортивной федерации поручил всю работу своим пяти заместителям и выдал им наборы печатей. Документ считается действительным, если на нем стоят печати всех возможных видов. Необходимо сделать так, чтобы любые три заместителя могли выдать действительный документ, а никакие два не могли. Какое минимальное число видов печатей должно быть? Сколько экземпляров всех печатей надо раздать заместителям?

**Ответ. 10; 30**

Вариант 3. Председатель спортивной федерации поручил всю работу своим пяти заместителям и выдал им наборы печатей. Документ считается действительным, если на нем стоят печати всех возможных видов. Необходимо сделать так, чтобы любые четыре заместителя могли выдать действительный документ, а никакие три не могли. Какое минимальное число видов печатей должно быть? Сколько экземпляров всех печатей надо раздать заместителям?

**Ответ. 10; 20**

Вариант 4. Председатель спортивной федерации поручил всю работу своим пяти заместителям и выдал им наборы печатей. Документ считается действительным, если на нем стоят печати всех возможных видов. Необходимо сделать так, чтобы любые три заместителя могли выдать действительный документ, а никакие два не могли. Какое минимальное число видов печатей должно быть? Сколько печатей надо выдать каждому заместителю?

**Ответ. 10; 6**

Вариант 5. Председатель спортивной федерации поручил всю работу своим пяти заместителям и выдал им наборы печатей. Документ считается действительным, если на нем стоят печати всех возможных видов. Необходимо сделать так, чтобы любые четыре заместителя могли выдать действительный документ, а никакие три не могли. Какое минимальное число видов печатей должно быть? Сколько печатей надо выдать каждому заместителям?

**Ответ. 10; 4**