

Всероссийская олимпиада школьников по математике

школьный этап 2024-2025

Максимальное количество баллов — 8

9 класс

1. Вариант 1. Коля заметил, что для краткой записи дней недели: пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс используются 8 букв, которые встречаются: «б» – 1 раз, «в» – 2 раза, «н» – 1 раз, «п» – 2 раза, «р» – 1 раз, «с» – 3 раза, «т» – 3 раза, «ч» – 1 раз. Коля выбрал 32 последовательных дня и для них сосчитал A – количество букв «т», и B – количество букв «р», встречавшихся в записи дней недели в выбранный период. Какое наибольшее значение могла принять разность $A - B$?

Ответ. 10

Решение. Заметим, что 32 последовательных дня включают в себя ровно 4 полных недели и 4 дня. Всего в краткой записи дней четырех недель букв «т» на 8 больше, чем букв «р» независимо от того, с какого дня мы начнем отсчет. Это следует из того, что в течение полной недели разность между числом появлений букв «т» и «р» равна 2. Также заметим, что среди оставшихся 4 дней буква «т» может встретиться максимум трижды, а буква «р» не более 1 раза. Но не может оказаться, что буква «т» встретилась трижды, а буква «р» не встретилась ни разу. Поэтому в любом случае разница между количеством букв «т» и «р» не более двух.

Пример. Начинаем отсчет так, чтобы четвертая полная неделя закончилась в пн и осталось 4 дня: вт, ср, чт, пт. Тогда наибольшее значение разности $A - B = 10$.

Вариант 2. Коля заметил, что для краткой записи дней недели: пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс используются 8 букв, которые встречаются: «б» – 1 раз, «в» – 2 раза, «н» – 1 раз, «п» – 2 раза, «р» – 1 раз, «с» – 3 раза, «т» – 3 раза, «ч» – 1 раз. Коля выбрал 39 последовательных дней и для них сосчитал A – количество букв «т», и B – количество букв «р», встречавшихся в записи дней недели в выбранный период. Какое наибольшее значение могла принять разность $A - B$?

Ответ. 12

Вариант 3. Коля заметил, что для краткой записи дней недели: пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс используются 8 букв, которые встречаются: «б» – 1 раз, «в» – 2 раза, «н» – 1 раз, «п» – 2 раза, «р» – 1 раз, «с» – 3 раза, «т» – 3 раза, «ч» – 1 раз. Коля выбрал 46 последовательных дней и для них сосчитал A – количество букв «т», и B – количество букв «р», встречавшихся в записи дней недели в выбранный период. Какое наибольшее значение могла принять разность $A - B$?

Ответ. 14

Вариант 4. Коля заметил, что для краткой записи дней недели: пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс используются 8 букв, которые встречаются: «б» – 1 раз, «в» – 2 раза, «н» – 1 раз, «п» – 2 раза, «р» – 1 раз, «с» – 3 раза, «т» – 3 раза, «ч» – 1 раз. Коля выбрал 53 последовательных дня и для них сосчитал А – количество букв «т», и Б – количество букв «р», встречавшихся в записи дней недели в выбранный период. Какое наибольшее значение могла принять разность А – Б?

Ответ. 16

2. Вариант 1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что линейная функция $y = f(x + 1) - f(x)$ обращается в ноль при $x = 5$. При каком значении аргумента обращается в ноль функция $y = f(x + 3) - f(x)$?

Ответ. 4

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(x + 1) - f(x) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$, откуда $10a + a + b = 0$, то есть $b = -11a$. Тогда $f(x + 3) - f(x) = 6ax + 9a + 3b = 6ax - 24a$. Это выражение обращается в 0 при $x = 4$.

Вариант 2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что линейная функция $y = f(x + 1) - f(x)$ обращается в ноль при $x = 8$. При каком значении аргумента обращается в ноль функция $y = f(x + 3) - f(x)$?

Ответ. 7

Вариант 3. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что линейная функция $y = f(x + 1) - f(x)$ обращается в ноль при $x = 7$. При каком значении аргумента обращается в ноль функция $y = f(x + 3) - f(x)$?

Ответ. 6

Вариант 4. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что линейная функция $y = f(x + 1) - f(x)$ обращается в ноль при $x = 6$. При каком значении аргумента обращается в ноль функция $y = f(x + 3) - f(x)$?

Ответ. 5

3. Вариант 1. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 11224 и делящееся на 225.

Ответ. 11224125

Решение. Искомое число должно делиться на 9 и на 25, то есть оканчиваться на 00, или на 25, или на 50, или на 75, и сумма цифр числа должна делиться на 9. У данного числа сумма цифр дает остаток 1 при делении на 9, то есть нам нужно приписать справа такие цифры, чтобы они давали число, делящееся на 25 с суммой цифр, дающей остаток 8 при делении на 9.

Вариант 2. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 21214 и делящееся на 225.

Ответ. 21214125

Вариант 3. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 11233 и делящееся на

225.

Ответ. 11233125

Вариант 4. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 2332 и делящееся на 225.

Ответ. 2332125

4. Вариант 1. Вася выбрал на плоскости 11 точек общего положения, то есть таких, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой, и покрасил две точки в красный цвет, а остальные – в зелёный. Через каждые две одноцветные точки он провёл прямую: соответственно одну красную, остальные – зелёные. Какое наименьшее число зелёных прямых могла пересечь красная прямая?

Ответ. 32

Решение. Всего проведено $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ зелёных прямых. Красная прямая пересечёт каждую зелёную прямую за исключением случая, если она ей параллельна. А сколько параллельных зелёных прямых можно построить? Каждая из них определяется парой зелёных точек, при этом одна точка может участвовать только в одной паре точек, задающих параллельные прямые. А 9 точек могут образовать не более 4 пар. То есть красная прямая может оказаться параллельной не более чем 4 зелёным прямым.

Вариант 2. Петя выбрал на плоскости 13 точек общего положения, то есть таких, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой, и покрасил две точки в красный цвет, а остальные – в зелёный. Через каждые две одноцветные точки он провёл прямую: соответственно одну красную, остальные – зелёные. Какое наименьшее число зелёных прямых могла пересечь красная прямая?

Ответ. 50

Вариант 3. Коля выбрал на плоскости 15 точек общего положения, то есть таких, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой, и покрасил две точки в красный цвет, а остальные – в зелёный. Через каждые две одноцветные точки он провёл прямую: соответственно одну красную, остальные – зелёные. Какое наименьшее число зелёных прямых могла пересечь красная прямая?

Ответ. 72

Вариант 4. Ваня выбрал на плоскости 17 точек общего положения, то есть таких, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой, и покрасил две точки в красный цвет, а остальные – в зелёный. Через каждые две одноцветные точки он провёл прямую: соответственно одну красную, остальные – зелёные. Какое наименьшее число зелёных прямых могла пересечь красная прямая?

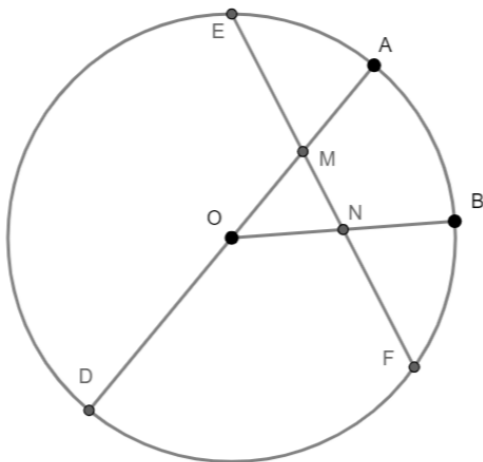
Ответ. 98

5. Вариант 1. Дана окружность ω с центром O . Точки M и N – соответственно середины радиусов OA и OB окружности ω . На окружности ω выбраны точки E и F так, что хорда EF проходит через точки M и N . Найдите отношение радиуса окружности ω к длине хорды

EF , если известно, что $EF : MN = 4$. В ответ запишите квадрат этого отношения.

Ответ. 0,3125 (т.е 5/16)

Решение. Проведем диаметр AD окружности ω .



Из условия следует, что $AM = \frac{R}{2}, DM = \frac{3R}{2}$, где R – радиус окружности ω . С другой стороны, из симметрии радиусов OA и OB относительно диаметра окружности ω , перпендикулярного хорде EF , получаем, что $EM = FN$. Таким образом, $EM \cdot MF = (\frac{1}{2}EF - \frac{1}{2}MN)(\frac{1}{2}EF + \frac{1}{2}MN) = \frac{1}{4}(p^2 - 1)MN^2$, где $EF : MN = p = 4$. С другой стороны $EM \cdot MF = AM \cdot DM = \frac{3}{4}R^2$. Тогда $\frac{3}{4}R^2 = \frac{1}{4}(p^2 - 1)MN^2, R^2 : EF^2 = \frac{p^2 - 1}{3p^2}$.

Вариант 2. Дана окружность ω с центром O . Точки M и N – соответственно середины радиусов OA и OB окружности ω . На окружности ω выбраны точки E и F так, что хорда EF проходит через точки M и N . Найдите отношение радиуса окружности ω к длине хорды EF , если известно, что $EF : MN = 5$. В ответ запишите квадрат этого отношения.

Ответ. 0,32 (т.е. 8/25)

Вариант 3. Дана окружность ω с центром O . Точки M и N – соответственно середины радиусов OA и OB окружности ω . На окружности ω выбраны точки E и F так, что хорда EF проходит через точки M и N . Найдите отношение радиуса окружности ω к длине хорды EF , если известно, что $EF : MN = 8$. В ответ запишите квадрат этого отношения.

Ответ. 0,328125 (т.е. 21/64)

Вариант 4. Дана окружность ω с центром O . Точки M и N – соответственно середины радиусов OA и OB окружности ω . На окружности ω выбраны точки E и F так, что хорда EF проходит через точки M и N . Найдите отношение радиуса окружности ω к длине хорды EF , если известно, что $EF : MN = 10$. В ответ запишите квадрат этого отношения.

Ответ. 0,33 (т.е. 33/100)

6. Вариант 1. На доске написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму

53. Вася вычел из каждого числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 44. Наконец Андрей вычел из каждого числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 59 (каждый осуществлял операции с начальным набором чисел, написанным на доске). Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. 12

Решение. Пусть сумма всех чисел на доске равна S , их количество равно n , а количества нулей, единиц, двоек на доске равны соответственно a, b, c . Тогда $S_1 = S - n + 2a$, так как каждое число, отличное от нуля, уменьшилось на 1, а ноль, напротив, превратился в единицу, то есть оказался на 2 больше, чем $0 - 1$. Так же $S_2 = S - 2n + 4a + 2b$, так как каждое число, отличное от нуля и единицы, уменьшилось на 2, а ноль, напротив, превратился в двойку, а единица превратилась в единицу. Наконец, аналогично, $S_3 = S - 3n + 6a + 4b + 2c$. Отсюда ответ: $\frac{1}{2}(S_1 + S_3 - 2S_2) = \frac{1}{2}(53 + 59 - 2 \cdot 44) = 12$.

Вариант 2. На доске написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 73. Вася вычел из каждого числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 74. Наконец Андрей вычел из каждого числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 95 (каждый осуществлял операции с начальным набором чисел, написанным на доске). Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. 10

Вариант 3. На доске написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 62. Вася вычел из каждого числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 58. Наконец Андрей вычел из каждого числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 80 (каждый осуществлял операции с начальным набором чисел, написанным на доске). Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. 13

Вариант 4. На доске написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 69. Вася вычел из каждого числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 64. Наконец Андрей вычел из каждого числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму 87 (каждый осуществлял операции с начальным набором чисел, написанным на доске). Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. 14

7. Вариант 1. На двенадцати карточках написаны целые числа от 21 до 32 (разные числа на разных карточках). Двум игрокам: А и Б сообщили об этом и выдали по одной карточке. Игрок может сказать «Больше», если уверен, что число на его карточке больше, чем у другого, «Меньше», если уверен, что оно меньше. В остальных случаях игрок говорит «Пас». Игроки отвечали по очереди: А, затем Б, затем А, ... Начиная с первого ответа (игрока А) были даны последовательно ответы: Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Меньше. Какое число было у игрока Б?

Ответ. 26.

Решение. Из первого ответа игрока А («Пас») следует, что у него не могли быть числа 21 (иначе он сказал бы «Меньше») и 32 («Больше»). Из первого ответа второго игрока следует, что у него также не могли быть числа 21 и 32, но, помимо этого, также числа 22 (тогда он мог точно сказать «Меньше») и 31. Продолжая эти рассуждения получаем, что у А не могли быть числа 23 и 30, у Б – эти числа, а также 24 и 29, у А – также числа 25 и 28 (пятый ответ «Пас»). Значит, у А могло быть одно из чисел 26 и 27. И у Б также могло быть одно из этих двух чисел. Он сказал «Меньше», значит, у него было число 26.

Вариант 2. На двенадцати карточках написаны целые числа от 23 до 34 (разные числа на разных карточках). Двум игрокам: А и Б сообщили об этом и выдали по одной карточке. Игрок может сказать «Больше», если уверен, что число на его карточке больше, чем у другого, «Меньше», если уверен, что оно меньше. В остальных случаях игрок говорит «Пас». Игроки отвечали по очереди: А, затем Б, затем А, ... Начиная с первого ответа (игрока А) были даны последовательно ответы: Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Меньше. Какое число было у игрока Б?

Ответ. 28

Вариант 3. На двенадцати карточках написаны целые числа от 21 до 32 (разные числа на разных карточках). Двум игрокам: А и Б сообщили об этом и выдали по одной карточке. Игрок может сказать «Больше», если уверен, что число на его карточке больше, чем у другого, «Меньше», если уверен, что оно меньше. В остальных случаях игрок говорит «Пас». Игроки отвечали по очереди: А, затем Б, затем А, ... Начиная с первого ответа (игрока А) были даны последовательно ответы: Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Больше. Какое число было у игрока Б?

Ответ. 27

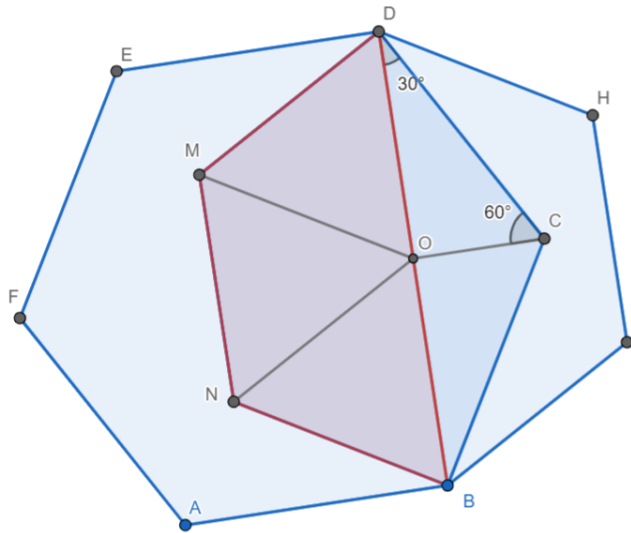
Вариант 4. На двенадцати карточках написаны целые числа от 22 до 33 (разные числа на разных карточках). Двум игрокам: А и Б сообщили об этом и выдали по одной карточке. Игрок может сказать «Больше», если уверен, что число на его карточке больше, чем у другого, «Меньше», если уверен, что оно меньше. В остальных случаях игрок говорит «Пас». Игроки отвечали по очереди: А, затем Б, затем А, ... Начиная с первого ответа (игрока А) были даны последовательно ответы: Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Пас, Больше. Какое число было у игрока Б?

Ответ. 28

8. Вариант 1. На доске нарисованы два правильных шестиугольника. Меньший из них имеет площадь 18, а наименьшая диагональ большего шестиугольника совпадает с наибольшей диагональю меньшего шестиугольника. Найдите площадь фигуры, образовавшейся в результате пересечения этих двух шестиугольников.

Ответ. 13

Решение.



Пусть $ABCDEF$ – большой шестиугольник, $MDHLBN$ – маленький (пусть его сторона равна a). Требуется найти площадь пятиугольника $CBNMD$. $S_{CBNMD} = S_{DMNB} + S_{DCB}$.

$S_{DMNB} = 3S_{DOM}$, так как он состоит из трех правильных треугольников. $S_{DCB} = 2S_{DOC} = DO \cdot OC$. В силу того, что $DO = a$, получим $OC = \frac{DO}{\sqrt{3}}$. $S_{DCB} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

$$S_{CBNMD} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}a^2}{12}.$$

Пусть S – площадь маленького 6-угольника $MDHLBN$. Тогда $S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Найдём отношение $\frac{S_{CBNMD}}{S} = \frac{13\sqrt{3}a^2}{12} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{13}{18}$, или $S_{CBNMD} = \frac{13}{18}S$.

Вариант 2. На доске нарисованы два правильных шестиугольника. Меньший из них имеет площадь 36, а наименьшая диагональ большего шестиугольника совпадает с наибольшей диагональю меньшего шестиугольника. Найдите площадь фигуры, образовавшейся в результате пересечения этих двух шестиугольников.

Ответ. 26

Вариант 3. На доске нарисованы два правильных шестиугольника. Меньший из них имеет площадь 54, а наименьшая диагональ большего шестиугольника совпадает с наибольшей диагональю меньшего шестиугольника. Найдите площадь фигуры, образовавшейся в результате пересечения этих двух шестиугольников.

Ответ. 39

Вариант 4. На доске нарисованы два правильных шестиугольника. Меньший из них имеет площадь 72, а наименьшая диагональ большего шестиугольника совпадает с наибольшей диагональю меньшего шестиугольника. Найдите площадь фигуры, образовавшейся в результате пересечения этих двух шестиугольников.

Ответ. 52