

Всероссийская олимпиада школьников по математике

школьный этап 2024-2025

Максимальное количество баллов— 8

8 класс

1. Вариант 1. В автопарке 76% всех автомобилей отечественные, остальные – импортные. 20% всех автомобилей неисправны. При этом 80% отечественных автомобилей исправны. Сколько процентов импортных автомобилей неисправны?

Ответ. 20%

Решение. Пусть x - количество отечественных автомобилей в автопарке, а y - количество импортных. Получается, что всего неисправных автомобилей $0,2 \cdot (x + y)$. Так как среди отечественных автомобилей исправны 80%, то неисправны соответственно 20%, что составляет $0,2 \cdot x$.

Отсюда находим количество неисправных импортных автомобилей, оно равно $0,2 \cdot (x + y) - 0,2 \cdot x = 0,2 \cdot y$ и составляет 20%.

Вариант 2. В автопарке 88% всех автомобилей отечественные, остальные – импортные. 10% всех автомобилей неисправны. При этом 90% отечественных автомобилей исправны. Сколько процентов импортных автомобилей неисправны?

Ответ. 10%

Вариант 3. В автопарке 75% всех автомобилей отечественные, остальные – импортные. 16% всех автомобилей неисправны. При этом 84% отечественных автомобилей исправны. Сколько процентов импортных автомобилей неисправны?

Ответ. 16%

Вариант 4. В автопарке 92% всех автомобилей отечественные, остальные – импортные. 22% всех автомобилей неисправны. При этом 78% отечественных автомобилей исправны. Сколько процентов импортных автомобилей неисправны?

Ответ. 22%

2. Вариант 1. Петя выписывает на карточках трёхзначные натуральные числа от 100 до 300 включительно (каждое – ровно один раз) и раскладывает их на кучки так, чтобы в одну кучку попадали все карточки с одной и той же суммой цифр. После этого Вася забирает себе кучку, в которой наибольшее количество карточек (если таких кучек несколько - он берет любую из них). Чему может равняться сумма цифр у каждого из Васиних чисел? (выбрать все подходящие варианты из множества 3, 9, 10, 11, 12, 20)

Ответ. 10 и 11

Решение. Посмотрим вначале сколькими способами можно набрать сумму k с помощью двух цифр, если эти цифры могут быть любыми. Если $k \leq 9$, то будет ровно $k + 1$ способ: $k + 0 = (k - 1) + 1 = \dots = 0 + k$.

Если мы берем какую-то пару AB , где A и B - это цифры, то заменив A на $9 - A$, а B на $9 - B$ мы получим число с суммой цифр $18 - A - B$. Следовательно чисел с суммой цифр k столько же, сколько с суммой цифр $18 - k$. Значит для суммы $k \geq 9$ способов будет $18 - k + 1$.

Если $k \leq 10$, то среди чисел от 100 до 199 с суммой k будет столько, сколькими способами можно набрать двумя цифрами сумму $k - 1$, значит их будет $k - 1 + 1 = k$ штук. А среди чисел от 200 до 299 их будет $k - 2 + 1 = k - 1$ штук, итого $2k - 1$. Максимум будет при $k = 10$, всего 19 штук. Число 300 присоединится к группе $k = 3$, в которой существенно меньше 18 чисел, т.е. не повлияет на максимум.

Если $k \geq 11$, то среди чисел от 100 до 199 будет $18 - (k + 1) + 1$ чисел с суммой k , а среди чисел от 200 до 299 их будет $18 - k(k - 2) + 1$, итого $41 - 2k$ число. Максимум при $k = 11$, там тоже получается 19 штук.

Таким образом, в обоих случаях максимальное количество одинаково, т.е. будет ровно две кучки по 19 чисел для сумм 10 и 11, а для остальных сумм количества чисел в кучках будут меньше.

Вариант 2. Петя выписывает на карточках трёхзначные натуральные числа от 300 до 500 включительно (каждое – ровно один раз) и раскладывает их на кучки так, чтобы в одну кучку попадали все карточки с одной и той же суммой цифр. После этого Вася забирает себе кучку, в которой наибольшее количество карточек (если таких кучек несколько - он берет любую из них). Чему может равняться сумма цифр у каждого из Васиных чисел?

(выбрать все подходящие варианты из множества 5, 11, 12, 13, 14, 22)

Ответ. 12, 13

Вариант 3. Петя выписывает на карточках трёхзначные натуральные числа от 400 до 600 включительно (каждое – ровно один раз) и раскладывает их на кучки так, чтобы в одну кучку попадали все карточки с одной и той же суммой цифр. После этого Вася забирает себе кучку, в которой наибольшее количество карточек (если таких кучек несколько - он берет любую из них). Чему может равняться сумма цифр у каждого из Васиных чисел?

(выбрать все подходящие варианты из множества 6, 12, 13, 14, 15, 23)

Ответ. 13, 14

Вариант 4. Петя выписывает на карточках трёхзначные натуральные числа от 700 до 900 включительно (каждое – ровно один раз) и раскладывает их на кучки так, чтобы в одну кучку попадали все карточки с одной и той же суммой цифр. После этого Вася забирает себе кучку, в которой наибольшее количество карточек (если таких кучек несколько - он берет любую из них). Чему может равняться сумма цифр у каждого из Васиных чисел?

(выбрать все подходящие варианты из множества 9, 15, 16, 17, 18, 26)

Ответ. 16, 17

3. Вариант 1. Велосипедисты Вася и Петя выехали навстречу друг другу из населенных пунктов Васино и Петино соответственно. Встретившись через 2 часа, они продолжили движение. На сколько минут раньше Вася приедет в Петино, чем Петя приедет в Васино, если скорость Васи вдвое больше скорости Пети?

Ответ. 180 минут

Решение. Пусть Вася стартовал из точки V , Петя - из точки P , и встретились они в точке X . Тогда расстояние XP Вася преодолеет за 1 час, так как Петя его проехал за 2 часа, а его скорость в 2 раза меньше. Аналогично, поймём, что путь VX Петя преодолеет за 4 часа. Значит, Вася приедет в Петино на 3 часа раньше.

Вариант 2. Велосипедисты Вася и Петя выехали навстречу друг другу из населенных пунктов Васино и Петино соответственно. Встретившись через 1,5 часа, они продолжили движение. На сколько минут раньше Вася приедет в Петино, чем Петя приедет в Васино, если скорость Васи втрое больше скорости Пети?

Ответ. 240 минут

Вариант 3. Велосипедисты Вася и Петя выехали навстречу друг другу из населенных пунктов Васино и Петино соответственно. Встретившись через 2 часа, они продолжили движение. На сколько минут раньше Вася приедет в Петино, чем Петя приедет в Васино, если скорость Васи в полтора раза больше скорости Пети?

Ответ. 100 минут

Вариант 4. Велосипедисты Вася и Петя выехали навстречу друг другу из населенных пунктов Васино и Петино соответственно. Встретившись через час, они продолжили движение. На сколько минут раньше Вася приедет в Петино, чем Петя приедет в Васино, если скорость Васи вчетверо больше скорости Пети?

Ответ. 225 минут

4. Вариант 1. В первую строчку записали число 1. Во вторую строчку число 12. Далее в строчку с номером k записывали число, получающееся приписыванием к предыдущей строчке числа k . Например, в 12-ой строчке будет записано число 123456789101112). Всего на доску выписали 101 строчку (то есть 101 число). Сколько из них делятся на 3?

Ответ. 67

Решение. Заметим, что остатки от деления на 3 у последовательных натуральных чисел повторяются с периодом 3 в последовательности 1, 2, 0. Как известно, число дает такой же остаток при делении на 3, что и его сумма цифр. Таким образом, достаточно рассмотреть ряд из сумм остатков: 1; (1+2); (1+2+0); (1+2+0+1) и т.д. Поскольку $1+2+0 = 3$, то в каждой тройке подряд идущих сумм вторая и третья по счету суммы делятся на 3. Из 99 сумм 66 будут кратны 3, сотое число не кратно, а 101-ое снова кратно 3. Получаем ответ: $66+1=67$.

Вариант 2. В первую строчку записали число 1. Во вторую строчку число 12. Далее в каждую следующую строчку записывали число, получающееся приписыванием к предыдущей строчке следующего натурального числа. Например, в 12-ой строчке будет записано число 123456789101112). Всего на доску выписали 110 строчек (то есть 110 чисел). Сколько из них делятся на 3?

Ответ. 73

Вариант 3. В первую строчку записали число 1. Во вторую строчку число 12. Далее в строчку с номером k записывали число, получающееся приписыванием к предыдущей строчке числа k . Например, в 12-ой строчке будет записано число 123456789101112). Всего на доску выписали 200 строчек (то есть 200 чисел). Сколько из них делятся на 3?

Ответ. 133

Вариант 4. В первую строчку записали число 1. Во вторую строчку число 12. Далее в строчку с номером k записывали число, получающееся приписыванием к предыдущей строчке числа k . Например, в 12-ой строчке будет записано число 123456789101112). Всего на доску выписали 140 строчек (то есть 140 чисел). Сколько из них делятся на 3?

Ответ. 93

5. Вариант 1. Внутри квадрата отмечены три точки. Квадрат разбили на треугольники так, что вершинами каждого треугольника являются вершины квадрата или отмеченные точки. При этом каждая из семи данных точек является вершиной хотя бы одного треугольника. Какое количество треугольников могло получиться? (выбрать ответ из множества 4, 6, 7, 9, 10, 11)

Ответ. 6 и 7 .

Решение.

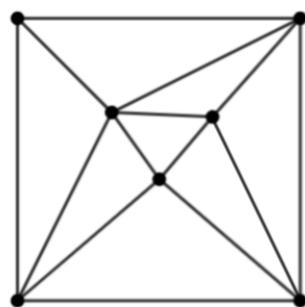
Подсчитаем сумму углов всех треугольников двумя способами. С одной стороны она равна $180^\circ \cdot T$, где T - количество треугольников. С другой стороны каждая вершина квадрата даёт вклад в 90° , а каждая вершина внутри - либо 180° , либо 360° (180° получается в том случае, когда она лежит внутри стороны некоторого треугольника разбиения).

$$90 \cdot 4 + 180 \cdot 3 \leq 180 \cdot T \leq 90 \cdot 4 + 360 \cdot 3$$

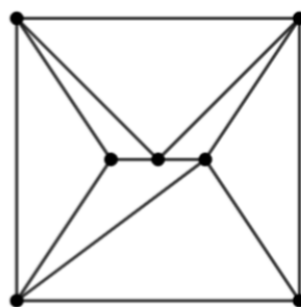
$$900 \leq 180 \cdot T \leq 1440$$

$$5 \leq T \leq 8.$$

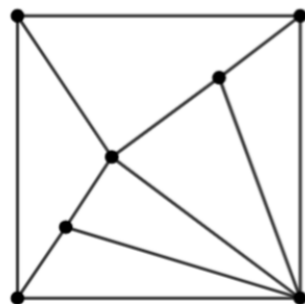
Остаётся привести примеры на каждый из случаев.



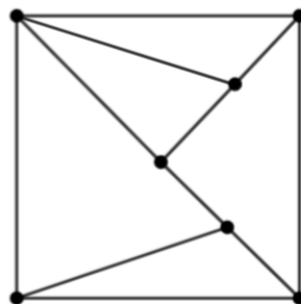
T=8



T=7



T=6



T=5

Тогда из предложенного в условии множества $\{4, 6, 7, 9, 10, 11\}$ нам подойдут 6 и 7.

Вариант 2. Внутри квадрата отмечены три точки. Квадрат разбили на треугольники так, что вершинами каждого треугольника являются вершины квадрата или отмеченные точки. При этом каждая из семи данных точек является вершиной хотя бы одного треугольника. Какое количество треугольников могло получиться? (выбрать ответ из множества 3, 4, 5, 7, 8, 10)

Ответ. 5, 7, 8

Вариант 3. Внутри квадрата отмечены три точки. Квадрат разбили на треугольники так, что вершинами каждого треугольника являются вершины квадрата или отмеченные точки. При этом каждая из семи данных точек является вершиной хотя бы одного треугольника. Какое количество треугольников могло получиться? (выбрать ответ из множества 4, 5, 6, 7, 9, 11)

Ответ. 5, 6, 7

Вариант 4. Внутри квадрата отмечены три точки. Квадрат разбили на треугольники так, что вершинами каждого треугольника являются вершины квадрата или отмеченные точки. При этом каждая из семи данных точек является вершиной хотя бы одного треугольника. Какое количество треугольников могло получиться? (выбрать ответ из множества 5, 7, 8, 9, 10, 12)

Ответ. 5, 7, 8

6. Вариант 1. Про натуральные числа x , y и z известно, что

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 1144$$

Найдите сумму $x + y + z$.

Ответ. 16

Решение. $1144 = 11 \cdot 13 \cdot 2^3$. Нам нужно представить 1144 в виде произведения трёх натуральных множителей, каждый из которых не менее двух, причём сумма этих множителей чётна (она равна $2x + 2y + 2z$). Следовательно, либо все три множителя чётны, либо один чётный и два нечётных.

1) если все три скобки в левой части чётны, то разложение единственно с точностью до перестановки множителей: $2 \cdot 22 \cdot 26$. Но заметим, что для множителей $(x + y)$, $(x + z)$, $(y + z)$ сумма любых двух из них больше третьего, поэтому разложение $2 \cdot 22 \cdot 26$ не реализуется, так как $2 + 22 < 26$.

2) если одна скобка - чётна, а две другие нечётны, то снова имеем единственный вариант $8 \cdot 11 \cdot 13$. Тогда $2x + 2y + 2z = 8 + 11 + 13 = 32$, откуда $x + y + z = 16$. Этот случай достигается при $x = 3$, $y = 5$, $z = 8$.

Вариант 2. Про натуральные числа x , y и z известно, что

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 1496$$

Найдите сумму $x + y + z$.

Ответ. 18

Вариант 3. Про натуральные числа x , y и z известно, что

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 1768$$

Найдите сумму $x + y + z$.

Ответ. 19

Вариант 4. Про натуральные числа x , y и z известно, что

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 1976$$

Найдите сумму $x + y + z$.

Ответ. 20

7. Вариант 1. В треугольнике ABC со сторонами $AB=5$, $AC=13$, медиана $AM=6$. Чему равна площадь треугольника ABC ?

Ответ. 30

Решение. Продлим медиану AM на её длину и получим точку D . $AD = 2 \cdot AM = 12$. $ABCD$ - параллелограмм. Тогда в треугольнике ABD $AB = 5$, $AD = 12$, $BD = AC = 13$. $AB^2 + AD^2 = BD^2$. Следовательно, по обратной теореме Пифагора, треугольник ABD - прямоугольный, и его площадь равна $0,5 \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Поскольку диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника, то и площадь треугольника ABD и площадь треугольника AB составляют половину от площади параллелограмма $ABCD$,

Вариант 2. В треугольнике ABC со сторонами $AB=6$, $AC=10$, медиана $AM=4$. Чему равна площадь треугольника ABC ?

Ответ. 24

Вариант 3. В треугольнике ABC со сторонами $AB=16$, $AC=20$, медиана $AM=6$. Чему равна площадь треугольника ABC ?

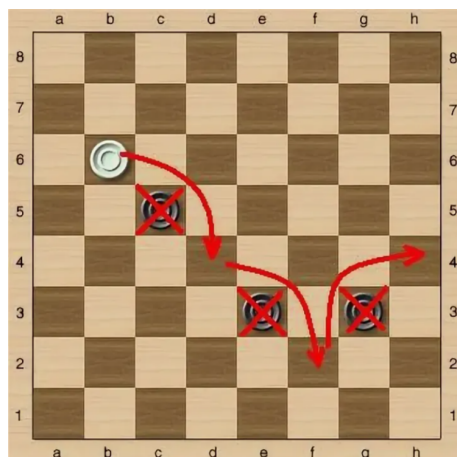
Ответ. 96

Вариант 4. В треугольнике ABC со сторонами $AB=15$, $AC=17$, медиана $AM=4$. Чему равна площадь треугольника ABC ?

Ответ. 60

8. Вариант 1. Незнайка хочет поставить на чёрные клетки шахматной доски 8×8 две чёрные шашки и одну белую так, чтобы белая шашка могла побить обе чёрные за один ход. Сколькими способами он может это сделать?

Шашка бьет соседнюю по диагонали клетку, перепрыгивая через нее. При этом, если после прыжка в соседней по диагонали клетке снова оказывается шашка противника, то она тоже бьется этим же ходом. Побитая шашка снимается с доски. Например, на рисунке показано, как белая шашка бьет три черных.

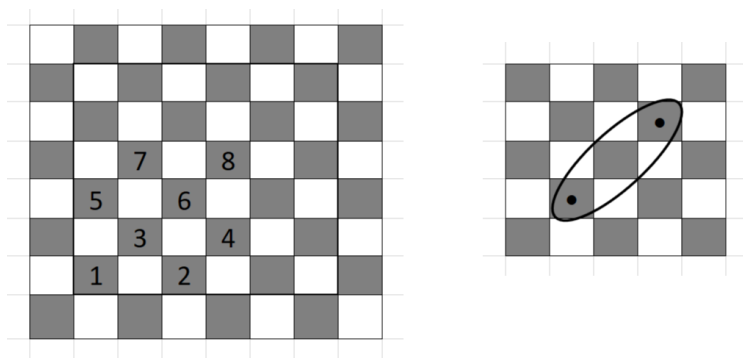


Ответ. 128

Решение.

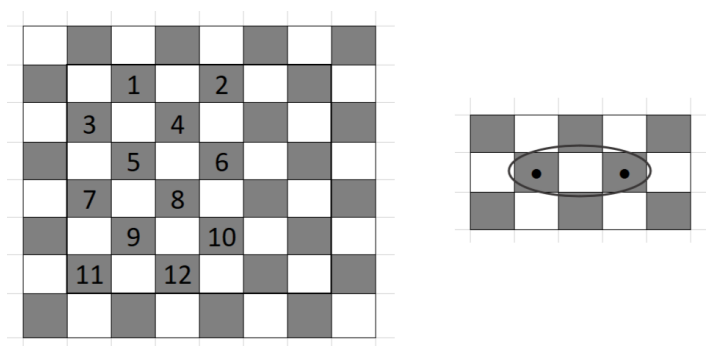
Чтобы две шашки бились одной за один ход они должны стоять либо по диагонали через одну клетку (причём ни одна из них не должна стоять на крайней горизонтали или вертикали); либо на одной горизонтали (вертикали) через одну клетку (опять же - не на краю доски).

1 вариант:



Есть 8 способов поставить две чёрные шашки по диагонали, направленной слева снизу - вправо вверх (см. рисунок, цифрами отмечены все возможные положения левой-нижней шашки в паре). К каждой такой паре белую шашку можно приставить двумя способами. Итого 16 способов. Ещё 16 способов получим для диагоналей, направленных слева сверху - вправо вниз.

2 вариант:

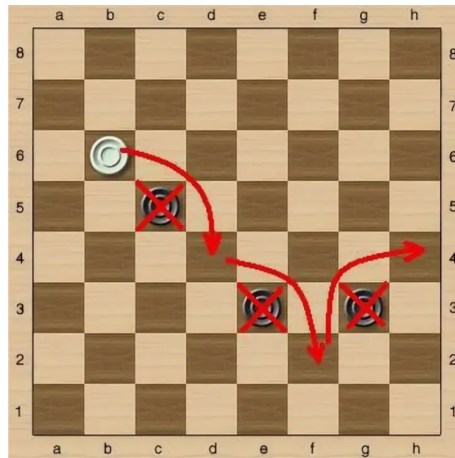


по горизонтали описанным выше способом две чёрные шашки можно поставить 12 способами (см. рисунок, цифрами отмечены все возможные положения левой шашки в паре). Приставить к такой паре белую шашку можно четырьмя способами. Итого 48 способов. Ещё 48 способов получим, если две черные шашки будут стоять через одну клетку по вертикали.

Сложив все возможные способы, получаем ответ: $16 + 16 + 48 + 48 = 128$.

Вариант 2. Незнайка хочет поставить на чёрные клетки шахматной доски 9×9 (угловые клетки доски покрашены в черный цвет) две чёрные шашки и одну белую так, чтобы белая шашка могла побить обе чёрные за один ход. Сколькими способами он может это сделать?

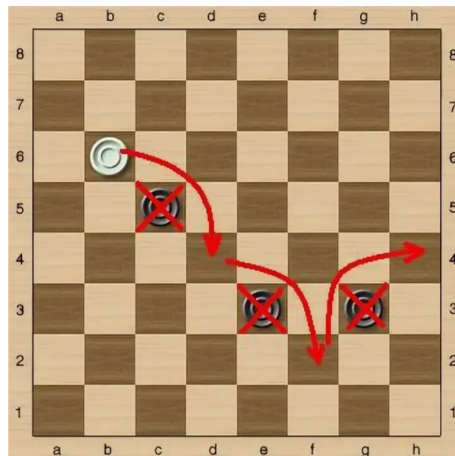
Шашка бьет соседнюю по диагонали клетку, перепрыгивая через нее. При этом, если после прыжка в соседней по диагонали клетке снова оказывается шашка противника, то она тоже бьется этим же ходом. Побитая шашка снимается с доски. Например, на рисунке показано, как белая шашка бьет три черных.



Ответ. 196

Вариант 3. Незнайка хочет поставить на чёрные клетки шахматной доски 8×9 две чёрные шашки и одну белую так, чтобы белая шашка могла побить обе чёрные за один ход. Сколькими способами он может это сделать?

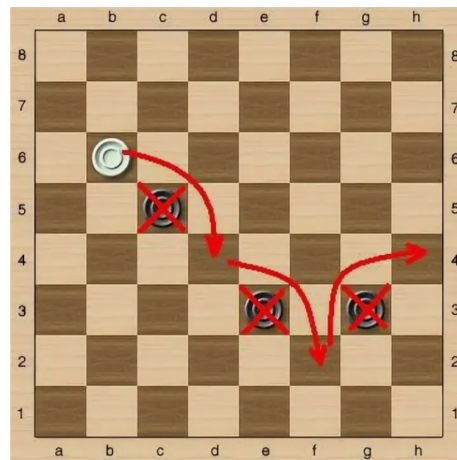
Шашка бьет соседнюю по диагонали клетку, перепрыгивая через нее. При этом, если после прыжка в соседней по диагонали клетке снова оказывается шашка противника, то она тоже бьется этим же ходом. Побитая шашка снимается с доски. Например, на рисунке показано, как белая шашка бьет три черных.



Ответ. 156

Вариант 4. Незнайка хочет поставить на чёрные клетки шахматной доски 9×10 две чёрные шашки и одну белую так, чтобы белая шашка могла побить обе чёрные за один ход. Сколькими способами он может это сделать?

Шашка бьет соседнюю по диагонали клетку, перепрыгивая через нее. При этом, если после прыжка в соседней по диагонали клетке снова оказывается шашка противника, то она тоже бьется этим же ходом. Побитая шашка снимается с доски. Например, на рисунке показано, как белая шашка бьет три черных.



Ответ. 224